Abitur 2011 (Thema 2, 4 und 8)

Das Logo der Firma Westwerk ist eine Fläche, deren Rand sich in einem geeigneten Koordinatensystem durch Teile der Graphen der Funktionen g und h mit den Funktionsgleichungen

$$g(x) = x^4 - 3{,}75x^2 - 1, \qquad h(x) = x^4 - 3x^2 - 4,\ x \in \mathbb{R},$$

beschreiben lässt (siehe *Abbildung* auf Seite 2). Das Logo wird bei dieser Beschreibung durch die Graphen von g und h eingeschlossen. 1 Längeneinheit entspricht 1 cm.

a) (1) *Zeigen Sie, dass das Logo eine achsensymmetrische Figur ist.*

(2) *Geben Sie die maximale Breite des Logos an.*

(3) Die Punkte P und Q liegen zwei Millimeter direkt „unter" den tiefsten Punkten der oberen Begrenzungslinie des Logos. Zur Befestigung verbindet eine Querstrebe die Punkte P und Q. *Bestimmen Sie rechnerisch die Länge der Querstrebe.*

(4) Die Graphen von g und h besitzen jeweils genau zwei Wendepunkte.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Wendepunkte der Graphen der Begrenzungskurven des Logos an verschiedenen Stellenliegen.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(9|-4|-2)$, $B(-3|8|-2)$, $C(-3|-4|10)$, $P(3|2|4)$ und $Q(-2|-3|-1)$ gegeben.

a) (1) *Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.*

(2) *Berechnen Sie je eine Gleichung der Ebene E_{ABC}, die A, B und C enthält, in Parameter- ~~und Koordinatenform.~~*

b) Der Punkt $S(1|0|2)$ ist der Schwerpunkt des Dreiecks *ABC*.
Zeigen Sie, dass die Gerade g, die durch P und Q verläuft, die Ebene E_{ABC} in S senkrecht schneidet.

Schmuggel von Zigaretten verursacht jedes Jahr hohe Steuerausfälle für den deutschen Fiskus. Um einen Überblick darüber zu bekommen, wie hoch der Anteil an unversteuerten Zigaretten ist, wird eine große Anzahl leerer Zigarettenschachteln in bundesweit 22 Verwertungsstellen des dualen Systems gesammelt und auf das Vorhandensein von Steuerbanderolen überprüft.
a) In einer süddeutschen Großstadt hatten 10,7 % der Zigarettenschachteln keine Steuerbanderole. Im Folgenden soll diese relative Häufigkeit als Wahrscheinlichkeit angenommen werden.
(1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dort von 40 zufällig in der Entsorgungsstation gesammelten Zigarettenschachteln….
(1.1) genau 4 Schachteln keine Steuerbanderole haben,
(1.2) mehr als die erwartete Anzahl Schachteln keine Steuerbanderole hat,
(1.3) mindestens 3 und höchstens 5 Schachteln keine Steuerbanderole haben.

(2) Bestimmen Sie, wie viele Zigarettenschachteln man in der Entsorgungsstation mindestens einsammeln muss, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % mindestens eine Schachtel ohne Steuerbanderole erhält

b) In einer Lieferung von 100 Stangen Zigaretten befinden sich 8 Stangen unverzollter Zigaretten. Bei einer Kontrolle entnimmt der Zoll zufällig 5 Stangen nacheinander und untersucht diese. Wird dabei unverzollte Ware gefunden, wird die gesamte Lieferung beschlagnahmt.
(1) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lieferung beschlagnahmt wird.
(2) Bestimmen Sie (z. B. durch systematisches Probieren) die Anzahl der Stangen, die der Zoll mindestens hätte entnehmen müssen, damit diese Lieferung mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50 % beschlagnahmt worden wäre.

Lösungen

(1) Da x nur in geraden Potenzen in den Funktionstermen von g und h vorkommt (z. B. $1 = 1 \cdot x^0$), sind die Graphen von g und h achsensymmetrisch zur „y-Achse".
$\Rightarrow$ Das Logo ist eine achsensymmetrische Figur.
[Mögl. Alternative: Vergleich $g(x)$ und $g(-x)$ bzw. $h(x)$ und $h(-x)$ für alle $x \in IR$]

(2) Die größte Breite des Logos beträgt 4 cm.

(3) Der Abstand der Punkte P und Q entspricht dem Abstand der Tiefp. des Graphen von g.

Ableitungen von g: $g'(x) = 4x^3 - 7{,}5x$ $\qquad$ $g''(x) = 12x^2 - 7{,}5$

Extremstellen von g:
Ein hinreichendes Kriterium für eine relative Extremstelle einer mehrfach differenzierbaren Funktion g lautet $g'(x) = 0 \wedge g''(x) \neq 0$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 7{,}5x = 0 \Leftrightarrow x(4x^2 - 7{,}5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 4x^2 - 7{,}5 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{1{,}875} \vee x = -\sqrt{1{,}875}$

$g''(0) = -7{,}5 < 0$: relatives Maximum an der Stelle 0.

$g''\left(\sqrt{1{,}875}\right) = g''\left(-\sqrt{1{,}875}\right) = 22{,}5 - 7{,}5 > 0$:

relatives Minimum an den Stellen $\sqrt{1{,}875}$ und $-\sqrt{1{,}875}$.

Die Querstrebe ist $2\sqrt{1{,}875} \approx 2{,}74$ cm lang.

(4) Wendestellen von h:
Ein notwendiges Kriterium für eine Wendestelle einer mehrfach differenzierbaren Funktion h lautet $h''(x) = 0$. $\qquad$ $h''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{0{,}5} \vee x = -\sqrt{0{,}5}$

Höchstens an den Stellen $\sqrt{0{,}5}$ bzw. $-\sqrt{0{,}5}$ können Wendestellen von h liegen. Da der Graph von h genau zwei Wendepunkte besitzt, liegen die Wendepunkte von h an den Stellen $\sqrt{0{,}5}$ bzw. $-\sqrt{0{,}5}$.

Ableitungen von g: $g'(x) = 4x^3 - 7{,}5x$ $\qquad$ $g''(x) = 12x^2 - 7{,}5$ (s. o.)

Da $g''\left(\sqrt{0{,}5}\right) = g''\left(-\sqrt{0{,}5}\right) = -1{,}5 \neq 0$ ist, ist das notwendige Kriterium für Wendepunkte an den Stellen $\sqrt{0{,}5}$ bzw. $-\sqrt{0{,}5}$ für die Funktion g nicht erfüllt. Die Wendepunkte der Graphen von g und h liegen an verschiedenen Stellen.

[Analog können auch zuerst die Wendestellen des Graphen von g berechnet werden. Möglich wäre auch eine Bestimmung der Wendestellen der Graphen von g und h.]

Modelllösung a)

(1) Es gilt: $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-12\\12\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}0\\-12\\12\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-12\\0\\12\end{pmatrix}$. $\Rightarrow |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{288}=12\sqrt{2}$ [LE].

$\Rightarrow$ Das Dreieck ABC ist gleichseitig.

(2) Die Vektoren $\overrightarrow{AB}=12\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC}=12\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ sind linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene E_{ABC}. Eine Parametergleichung ist

$$E_{\text{ABC}}:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}9\\-4\\-2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\ r,s\in\mathbb{R}.$$

b) Gerade gPQ aufstellen und Punktprobe mit S durchführen. Dann noch Skalarprodukt des RichtVek mit den Spannvek. = 0 zeigen

Modelllösung a)

(1) Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der unverzollten Zigarettenschachteln in der Stichprobe von 40 Schachteln. Dann ist X binomialverteilt mit $p = 0{,}107$.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

(1.1) $P(X=4)=\binom{40}{4}\cdot 0{,}107^4\cdot 0{,}893^{36}\approx 0{,}2037=20{,}37\ \%$

(1.2) $E(X)=0{,}107\cdot 40=4{,}28$

$P(X>4{,}28)=P(X\geq 5)=1-P(X\leq 4)\ \approx 1-0{,}5713=0{,}4287=42{,}87\ \%$

(1.3) $P(3\leq X\leq 5)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$

$=\binom{40}{3}\cdot 0{,}107^3\cdot 0{,}893^{37}+\binom{40}{4}\cdot 0{,}107^4\cdot 0{,}893^{36}+\binom{40}{5}\cdot 0{,}107^5\cdot 0{,}893^{35}$

$\approx 0{,}5633=56{,}33\ \%$

(2) Die Wahrscheinlichkeit, in einer Stichprobe der Größe n mindestens eine Schachtel ohne Steuerbanderole zu finden, beträgt:

$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0{,}893^n$.

Das gesuchte n erhält man also mit dem Ansatz:

$1-0{,}893^n\geq 0{,}8 \Leftrightarrow 0{,}893^n\leq 0{,}2 \Leftrightarrow n\geq \log_{0{,}893}(0{,}2)\approx 14{,}22$.

Man muss also mindestens 15 Schachteln einsammeln.

Modelllösung b)

(1) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter den 5 ausgewählten Zigarettenstangen keine unverzollten Stangen befinden, beträgt

$\frac{92}{100}\cdot\frac{91}{99}\cdot\frac{90}{98}\cdot\frac{89}{97}\cdot\frac{88}{96}\approx 0{,}6532=65{,}32\ \%$.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also 1 – 0,6532 = 0,3468 = 34,68 %.

(2) Die Lösung wird durch Probieren ermittelt; die Wahrscheinlichkeiten werden nach demselben Muster wie in (1) bestimmt.

Testet der Zoll 6 Stangen, so ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von 40,18 %.
Testet der Zoll 7 Stangen, so ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von 45,27 %.
Testet der Zoll 8 Stangen, so ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von 49,98 %.
Testet der Zoll 9 Stangen, so ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von 54,33 %.
Der Zoll müsste also mindestens 9 Stangen testen.