Zentrale Klausur EF 2019, Auszüge

Hilfsmittelfreier Teil (Stochastik fehlt hier):

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -x^3 + 0{,}5 \cdot x^2 - 2 \cdot x,\ x \in \mathbb{R}$.

(1) *Berechnen Sie* $f'(1)$.

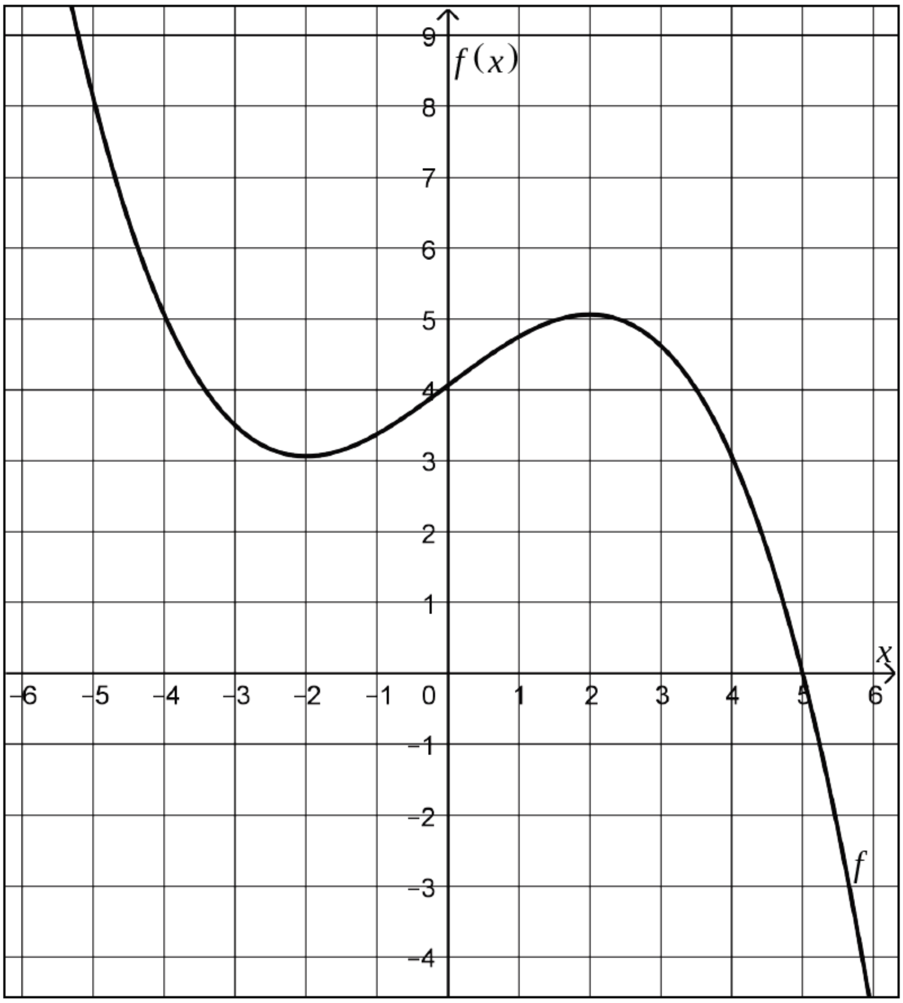
(2) *Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt* $P(1 \mid f(1))$.

Teil mit Hilfsmitteln:

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -\frac{1}{16} \cdot x^3 + \frac{3}{4} \cdot x + \frac{65}{16},\ x \in \mathbb{R}.$$

Der Graph der Funktion f ist in der folgenden *Abbildung* dargestellt.



a) *Geben Sie die exakten Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen von f mit der y-Achse an.*

b) *Bestimmen Sie rechnerisch die lokalen Extremstellen von f.*

c) Die Sekante s verläuft durch den Tiefpunkt $T\left(-2 \mid \frac{49}{16}\right)$ und den Hochpunkt $H\left(2 \mid \frac{81}{16}\right)$ des Graphen von f.

(1) *Zeichnen Sie die Sekante s in die Abbildung ein und bestimmen Sie rechnerisch die Steigung von s.*

(2) Im Bereich von $x=-2$ bis $x=2$ gibt es Stellen, an denen die Tangente an den Graphen von f eine größere Steigung besitzt als die Sekante s.
Geben Sie eine solche Stelle an und begründen Sie mithilfe einer Rechnung.

d) Der Graph von f wird so in Richtung der y-Achse verschoben, dass der verschobene Graph genau zwei Nullstellen besitzt.
Geben Sie alle Möglichkeiten einer solchen Verschiebung an.

e) Die Funktion f ist die Ableitungsfunktion einer Funktion g.
Entscheiden Sie begründet, z. B. mithilfe des Graphen von f, für jede der beiden folgenden Aussagen (A) *und* (B), *ob sie wahr oder falsch ist.*

(A) Der Graph von g steigt im gesamten Bereich von $x=-4$ bis $x=0$.

(B) Der Graph von g besitzt an der Stelle $x=5$ einen lokalen Hochpunkt.

Der US-Amerikaner Carl Lewis gehört zu den erfolgreichsten Leichtathleten der Sportgeschichte. Einen seiner acht Weltmeistertitel hat er bei den Leichtathletik-Weltmeisterschaften 1991 im 100 m-Lauf gewonnen. In dieser Aufgabe wird eine 70 m lange Teilstrecke seines Finallaufes betrachtet. Für diese Teilstrecke wird die Momentangeschwindigkeit in Abhängigkeit von der zurückgelegten Strecke durch folgende Funktion *v* modelliert:

$$v(x)=-0{,}0061\cdot x^4+0{,}1475\cdot x^3-1{,}348\cdot x^2+5{,}65\cdot x+2{,}6\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

Dabei ist x die zurückgelegte Strecke in der Einheit 10 m (d.h. x=2 entspricht 20m, x=3 entspricht 30m usw.). v(x) ist die zugehörige Momentangeschwindigkeit in m/s.
Für $2\le x\le 9$ beschreibt diese Funktion näherungsweise die Momentangeschwindigkeit von Carl Lewis von der 20m-Markierung bis zur 90m-Markierung.

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf die durch die Funktion v modellierte Momentangeschw.
b) Carl Lewis hat seine maximale Geschwindigkeit in dem Finallauf zwischen der 20 m-Markierung und der 90 m-Markierung erreicht. *Bestimmen Sie rechnerisch diese maximale Geschwindigkeit.*
c) (1) Carl Lewis hat in seinem Finallauf für die 100 m-Strecke vom Start bis zum Ziel 9,86 s benötigt. *Weisen Sie nach, dass seine Durchschnittsgeschwindigkeit bei diesem Lauf ca. 10,14 m/s betragen hat.*
(2) *Ermitteln Sie mithilfe der Funktion v, nach welcher zurückgelegten Strecke die Momentangeschwindigkeit von Carl Lewis genauso groß wie seine Durchschnittsgeschwindigkeit gewesen ist.*

e) Die Funktion v soll zu einer Funktion v_{neu} transformiert werden, so dass eine Strecke von 20 Metern nicht mehr durch $x=2$, sondern durch $x=20$, eine Strecke von 30 Metern nicht durch $x=3$, sondern durch $x=30$ usw. festgelegt wird. $v_{neu}(x)$ ist wieder die zugehörige Momentangeschwindigkeit von Carl Lewis in m/s.

(1) *Geben Sie an, durch welche Transformation der Graph der Funktion v in den Graphen der Funktion v_{neu} überführt wird.*

(2) Die Funktion v_{neu} wird durch eine der folgenden Gleichungen beschrieben.
Geben Sie an, welche der Gleichungen die Funktion v_{neu} beschreibt.

$v_{neu}(x)=10\cdot v(x)$ $\quad$ $v_{neu}(x)=v(10\cdot x)$ $\quad$ $v_{neu}(x)=v(0{,}1\cdot x)$ $\quad$ $v_{neu}(x)=v(x-10)$

Modelllösung:

(1) $f'(x) = -3 \cdot x^2 + x - 2$. $\quad f'(1) = -3 \cdot 1^2 + 1 - 2 = -4$.

(2) Ansatz: $t: y = -4 \cdot x + b$. $\quad f(1) = -1^3 + 0{,}5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = -2{,}5$.

Einsetzen der Koordinaten des Punktes $P(1 \mid -2{,}5)$ liefert: $\quad -2{,}5 = -4 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = 1{,}5$.

Damit ist eine Gleichung der Tangente $t: y = -4 \cdot x + 1{,}5$.

Modelllösung a)

Der Graph der Funktion f schneidet die y-Achse im Punkt $\left(0 \,\middle|\, \frac{65}{16}\right)$.

Modelllösung b)

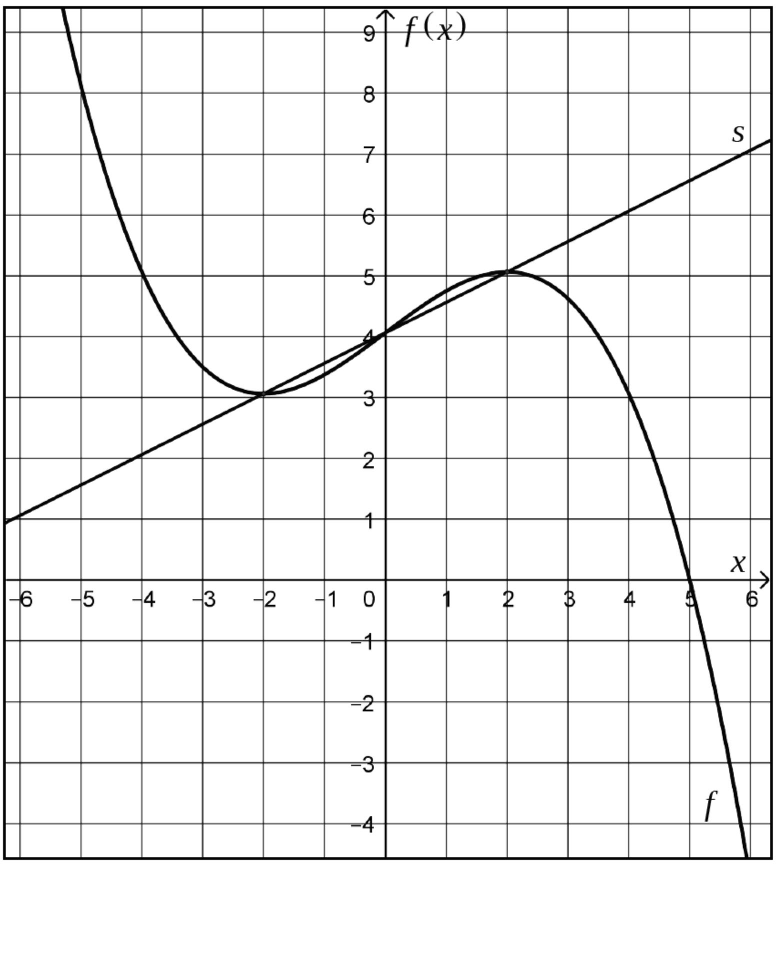
$f'(x) = -\frac{3}{16} \cdot x^2 + \frac{3}{4}$.

Aus der notwendigen Bedingung $f'(x) = 0$ für lokale Extremstellen ergeben sich die beiden Lösungen $x = -2$ und $x = 2$.

Da zusätzlich $f'(-3) = -\frac{15}{16} < 0$, $f'(0) = \frac{3}{4} > 0$ und $f'(3) = -\frac{15}{16} < 0$ gilt, liegt sowohl an der Stelle $x = -2$ als auch an der Stelle $x = 2$ ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte von f' vor. Beide Stellen sind daher Extremstellen der Funktion f.

Modelllösung c)

(1)



Für die Steigung m_s der Sekante s gilt:

$$m_s = \frac{\frac{81}{16} - \frac{49}{16}}{2 - (-2)} = \frac{1}{2}.$$

(2) $x = 0$ ist ein Beispiel für eine Stelle, an der die Tangente eine größere Steigung besitzt als die Sekante s, da gilt: $f'(0) = \frac{3}{4} > \frac{1}{2}$.

Modelllösung d)

Möglichkeit 1: Verschiebung des Graphen von f um $\frac{49}{16}$ Einheiten nach unten.

Möglichkeit 2: Verschiebung des Graphen von f um $\frac{81}{16}$ Einheiten nach unten.

Modelllösung e)

Die Aussage (A) ist wahr, denn im genannten Bereich sind alle Funktionswerte von f positiv.

Die Aussage (B) ist ebenfalls wahr, da an der Stelle $x = 5$ ein Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Funktionswerten von f vorliegt.

[Hinweis: Die Tatsache, dass die Stelle $x = 5$ eine Nullstelle von f ist, darf der *Abbildung* ohne weiteren Nachweis entnommen werden.]

Aufgabe 4:

Modelllösung b)

$v'(x) = -0{,}0244 \cdot x^3 + 0{,}4425 \cdot x^2 - 2{,}696 \cdot x + 5{,}65$.

Aus der notwendigen Bedingung $v'(x) = 0$ für lokale Extremstellen ergibt sich die Lösung x_1 mit $x_1 \approx 7{,}64$.

Zusätzlich gilt $v'(0) = 5{,}65 > 0$ und $v'(10) = -1{,}46 < 0$. Daher liegt an der Stelle x_1 ein Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Funktionswerten von v' und damit ein lokales Maximum von v vor. Wegen $v(2) \approx 9{,}59$, $v(x_1) \approx 12{,}08$ und $v(9) \approx 11{,}77$ liegt bei x_1 auch das absolute Maximum von v im Intervall $[2;9]$ vor.

Nach ca. 76 m hat Carl Lewis mit etwa 12 m/s seine maximale Geschwindigkeit erreicht.

Modelllösung c)

(1) $\frac{100\,\text{m}}{9{,}86\,\text{s}} \approx 10{,}14\,\text{m/s}$. Die Durchschnittsgeschwindigkeit von Carl Lewis hat ca. 10,14 m/s betragen.

(2) Die Gleichung $v(x) = 10{,}14$ besitzt die Lösungen x_2 und x_3 mit $x_2 \approx 2{,}34$ und $x_3 \approx 10{,}39$. x_3 liegt nicht im Intervall $[2;9]$.
Nach ca. 23 m ist die Momentangeschwindigkeit von Carl Lewis genauso groß wie seine Durchschnittsgeschwindigkeit gewesen.

Modelllösung e)

(1) Der Graph von v_{neu} geht durch eine Streckung mit dem Faktor 10 in x-Richtung aus dem Graphen von v hervor.

(2) Richtig ist (C): $v_{neu}(x) = v(0{,}1 \cdot x)$.