Parameterform / Normalenform / Koordinatenform in 2D

Umwandlung von Geradengleichungen in 2D (wichtig für's Verständnis, aber nicht Abi-relevant)

Gegeben: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ (Dies ist eine Parameterform)

<u>**A) Umwandlung der 2D-Geraden von Parameterform in Normalenform**</u>

1. Schritt: Normalenvektor $\vec{n}$ (also einen Vektor der senkrecht zum Richtungsvektor ist) finden.

Es muss also gelten: $\begin{pmatrix}n_1\\n_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}=0$ Eine naheliegende Lösung lautet: $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$

2. Schritt: Normalenform direkt aufstellen (der Stützvektor wird übernommen):

$\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}=0$ (Dies ist eine Normalenform)

<u>**B) Umwandlung der 2D-Geraden von Normalenform in Koordinatenform**</u>

Normalenform ausmultiplizieren und vereinfachen:

$$\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{x}\cdot\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow x_1\cdot 1+x_2\cdot(-5)-(1\cdot 1+3\cdot(-5))=0$$

$$\Leftrightarrow x_1 \quad -5x_2- \quad (-14) \quad =0$$

$$\Leftrightarrow x_1 \quad -5x_2 \quad =-14$$

(Dies ist eine Koordinatenform)

<u>**C) Umwandlung einer 2D-Geraden von Koordinatenform in Parameterform**</u>

1. Schritt: Finden von 2 Punkten, die die Koordinatenform erfüllen.

Zum Beispiel erfüllen Q(-4 | 2) und R(-14 | 0) die Koordinatenform.

2. Schritt: Aus diesen Punkten eine Gerade in Parameterform erstellen.

Es gilt: $\overrightarrow{QR}=\begin{pmatrix}-10\\-2\end{pmatrix}$ und mit $\overrightarrow{OQ}$ als Stützvektor ergibt sich: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-10\\-2\end{pmatrix}$

Parameterform / Normalenform / Koordinatenform in 3D

Umwandlung von Ebenengleichungen in 3D (Abi-relevant!)

Gegeben: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ (Dies ist eine Parameterform)

<u>**A) Umwandlung der Ebene von Parameterform in Normalenform**</u>

1. Schritt: Normalenvektor $\vec{n}$ finden (dieser muss senkrecht zu zu *<u>beiden</u>* Spannvektoren sein!)

Es muss also gelten: $\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=0$ und $\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}=0$

Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

$1\cdot n_1 + 2\cdot n_2 + 1\cdot n_3 = 0$

$3\cdot n_1 + 1\cdot n_2 + 2\cdot n_3 = 0$

Mit Hilfe des TR (Matrix und Rref bilden) ergibt sich: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}2 & 0 \end{bmatrix}$

Das LGS hat unendliche viele Lösungen. Wir benötigen aber nur eine (weil wir nur *einen* Normalenvektor brauchen). Es ist n_3 ein frei wählbarer Parameter und wir wählen z.B. $n_3 = 5$.

Dann ergeben sich sofort für n_1 und n_2 konkrete Ergebnisse: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

2. Schritt: Normalenform direkt aufstellen (Stützvektor wird übernommen): $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$

<u>B) Umwandlung der Ebene von Normalenform in Koordinatenform</u>

Normalenform ausmultiplizieren und vereinfachen:

$$-3 \cdot x_1 - x_2 + 5 \cdot x_3 - (1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -3 \cdot x_1 - x_2 + 5 \cdot x_3 = 10$$

<u>C) Umwandlung einer Ebene von Koordinatenform in Parameterform</u>

1. Schritt: Finden von 3 Punkten, die die Koordinatenform erfüllen.

Zum Beispiel: Q(0 | 0 | 2) und R(0 | -10 | 0) und S(-3 | -1 | 0)

2. Schritt: Aus diesen Punkten eine Ebene in Parameterform erstellen.

Es gilt: $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{QS} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und mit $\overrightarrow{OQ}$ als Stützvektor ergibt sich:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(Auch wenn's nicht so aussieht: diese Ebene ist mit der gegebenen Ebene identisch!)

Vorsicht: Falls man die Punkte Q,R und S ungeschickt wählt, so erhält man zwei Spannvektoren, die linear abhängig (also Vielfache voneinander) sind. In diesem Fall muss man einen der gefundenen Punkte aus Schritt 1 durch einen neuen ersetzen!

Dass zwei Ebenen identisch sind, lässt sich oft nur schwer an den Parameterformen ablesen, aber ziemlich einfach an deren Koordinatenformen erkennen:

Kann man die erste Koordinatenform durch einfache Multiplikation in die zweite Koordinatenform umwandeln, so sind die Ebenen identisch.

Beispielsweise ist die Ebene E_2: $6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 10 \cdot x_3 = -20$ identisch mit der Ebene aus obigem Beispiel, da man die Koordinatenform E_2 nur mit -0.5 multiplizieren muss.

Aufgaben:

Wandle die gegebene Koordinatenform erst in Parameterform, dann in Normalenform und wieder in Koordinatenform um (bis auf Vervielfachung müsste die ursprüngliche Ebene herauskommen).

Also musst Du die "Rezepte" in der Reihenfolge C,A,B abarbeiten.

1) $x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 6$

2) $x_1 - 4 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 = 4$

3) $x_1 + 0 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 = 4$

4) Denke Dir eine eigene Koordinatenform aus und trainiere mit dem Nachbar!